$y' = \frac{1}{5} e^{-x} \sin 3x - \frac{3}{5} e^{-x} \cos 3x$

$y'' = -\frac{1}{5} e^{-x} \sin 3x + \frac{6}{5} e^{-x} \cos 3x + \frac{9}{5} e^{-x} \sin 3x$

$\frac{8}{5} + \frac{2}{5} \quad -\frac{1}{5} e^{-x}$

$8 - 3 = \frac{5}{5} \quad \frac{5}{5}$

نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۳۹۶/۲/۱۱

وقت : ۹۰ دقیقه

$-\frac{6}{5}$

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس : **معادلات دیفرانسیل (۱۴ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / دوم) ۱۳۹۶- ۱۳۹۵

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱ - معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$ را حل کنید. ۱۵ نمره

سوال۲ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید. ۱۵ نمره

$$(\cos 2y - \sin x)dx - 2\tan x \sin 2y\, dy = 0$$

سوال۳ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' + \frac{y}{x} = -2xy^2$ را بنویسید. ۱۵ نمره

سوال۴ - فرض کنید $y_1 = (x+1)$ یک جواب خصوصی معادله زیر باشد، جواب عمومی آن را بیابید. ۱۵ نمره

$$(x^2 + 2x - 1)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$$

سوال۵ - جواب عمومی معادله ناهمگن $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 3x$ را بنویسید. ۲۰ نمره

موفق باشید

Scanned by CamScanner

بسمه تعالی

پاسخنامه سؤالات میان ترم درس معادلات دیفرانسیل ۹۶/۲/۱۱

سؤال ۱:

$$y' = \frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$$

معادله دیفرانسیل فوق همگن است. قرار می‌دهیم $y = V\cdot x$ (تغییر متغیر)

در نتیجه داریم:

$$y = Vx \Rightarrow y' = V'x + V \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{با جایگذاری}}$$

$$V'x + V = V + \sqrt{1-V^2} \Rightarrow V'x = \sqrt{1-V^2} \quad \text{(تفکیک پذیر)}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \sin^{-1}(V) = \ln x + C$$

$$\Rightarrow V = \sin(\ln x + C) \Rightarrow y = x\cdot\sin(\ln x + C)$$

سؤال ۲:

$$(\cos 2y - \sin x)\,dx - 2\tan x\cdot\sin 2y\,dy = 0$$

روش اول: می‌توان برای معادله فوق یک عامل انتگرال ساز پیدا کرد و آن را حل کرد.

If $M = \cos 2y - \sin x$ & $N = -2\tan x\cdot\sin 2y$

$$\Rightarrow M_y - N_x = -2\sin 2y + 2(1+\tan^2 x)\cdot\sin 2y = 2\tan^2 x\cdot\sin 2y$$

$$\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx \qquad \int \frac{2\tan^2 x\cdot\sin 2y}{-2\tan x\cdot\sin 2y}\,dx$$

$$\Rightarrow \mu = e \qquad \Rightarrow \mu = e$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \mu = e^{-\int \tan x\, dx} = e^{\ln|\cos x|} = \cos x$$

در نتیجه معادله همگن حاصل به صورت زیر است:

$$\cos x(\cos 2y - \sin x)dx - 2\sin x \cdot \sin 2y\, dy = 0$$

لذا جواب عمومی آن به فرم زیر است:

$$\sin x \cos 2y - \frac{\sin^2 x}{2} = C$$

روش دوم حل سؤال ۲:

$$(\cos 2y - \sin x)dx - 2\tan x \cdot \sin 2y \cdot dy = 0$$

قرار می دهیم $u = \cos 2y$ (تغییر متغیر). در نتیجه داریم

$$u = \cos 2y \Rightarrow du = -2\sin 2y\, dy$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله فوق}]{\text{با جایگذاری}} (u - \sin x)dx + \tan x\, du = 0$$

$$\Rightarrow u' = \frac{\sin x - u}{\tan x} \Rightarrow u' + u\cot x = \cos x$$

معادله فوق یک معادله خطی است که آن را حل می کنیم.

$$u = e^{-\int \cot x dx} \cdot \left(\int \cos x\, e^{\int \cot x dx} dx + c\right) \Rightarrow$$

$$u = e^{\ln(\csc x)} \cdot \left(\int \cos x \cdot e^{\ln(\sin x)} dx + C\right) \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$u = \csc x \left(\frac{\sin^2 x}{2} + C \right) = \frac{\sin x}{2} + C \cdot \csc x$$

$$\xrightarrow{u = \cos 2y} \cos 2y = \frac{\sin x}{2} + C \cdot \csc x \Longrightarrow$$

$$\sin x \cdot \cos 2y - \frac{\sin^2 x}{2} = C$$

سؤال ۳:

$$y' + \frac{y}{x} = -2xy^2$$

معادله فوق برنولی است. ~~قرار می‌دهیم~~

$$y^{-2} \cdot y' + \frac{y^{-1}}{x} = -2x$$

قرار می‌دهیم $u = y^{-1}$ داریم: $u = y^{-1} \Rightarrow u' = -y' \cdot y^{-2}$

با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$u' - \frac{u}{x} = 2x \qquad \text{(معادله خطی)}$$

$$\Rightarrow u = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int 2x \, e^{-\int \frac{1}{x} dx} \, dx + C \right)$$

$$\Rightarrow u = x \left(\int 2 \, dx + C \right) = x(2x + C) = 2x^2 + Cx$$

$$\xrightarrow{u = y^{-1}} y^{-1} = 2x^2 + Cx \Longrightarrow y_g = \frac{1}{2x^2 + Cx}$$

Scanned by CamScanner

سئوال ۴:

$$(x^2+2x-1)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0 \quad \& \quad y_1 = (x+1)$$

معادله فوق یک معادله همگن مرتبه دوم است که می‌توانیم با کمک فرمول آبل جواب آن را بدست آوریم. داریم:

$$y'' \underbrace{- \frac{2(x+1)}{(x^2+2x-1)}}_{P(x)} y' + \frac{2}{(x^2+2x-1)} y = 0$$

داریم: $\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x-1} dx$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y_2 = (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e$$

$$\Rightarrow y_2 = (x+1) \int \frac{e^{\ln(x^2+2x-1)}}{(x+1)^2} dx = (x+1) \int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} dx$$

$$= (x+1) \int \left(1 - \frac{2}{(x+1)^2}\right) dx$$

$$\Rightarrow y_2 = (x+1)\left(x + \frac{2}{(x+1)}\right) = x^2 + x + 2$$

لذا

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1(x+1) + c_2(x^2+x+2)$$

نکته: می‌توان مسئله فوق را با روش کاهش مرتبه نیز حل کرد. که در آن y_2 از فرمول $y_2 = y_1 \cdot V(x)$ بدست می‌آید که در آن $V(x)$ مجهول است و با جایگذاری در معادله اصلی بدست می‌آید که همان فرمول آبل حاصل می‌شود.

ص ۴

Scanned by CamScanner

سؤال ۵.

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 3x$$

الف) برای پیدا کردن جواب عمومی معادله ناهمگن فوق ابتدا جواب عمومی معادله همگن و سپس جواب خصوصی معادله ناهمگن را با کمک روش ضرایب نامعین پیدا می‌کنیم.

جواب عمومی همگن:

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \xrightarrow[\text{مشخصه}]{\text{معادله}} \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm 2i$$

$$\Rightarrow \quad y_{g\,\text{همگن}} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

جواب خصوصی ناهمگن:

$$y_s = e^{-x}(A_0 \sin 3x + B_0 \cos 3x)$$

با جایگذاری y_s در معادله اصلی باید A_0 و B_0 را بیابیم.

$$y_s = e^{-x}(A_0 \sin 3x + B_0 \cos 3x)$$

$$\Rightarrow y' = e^{-x}\sin 3x(-A_0 - 3B_0) + e^{-x}\cos 3x(3A_0 - B_0)$$

$$\Rightarrow y'' = e^{-x}\sin 3x(-8A_0 + 6B_0) + e^{-x}\cos 3x(-6A_0 - 8B_0)$$

با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 3x(-5A_0) + e^{-x}\cos 3x(-5B_0)$$

$$= e^{-x}\sin 3x \Rightarrow \begin{cases} -5A_0 = 1 \Rightarrow A_0 = -\frac{1}{5} \\ -5B_0 = 0 \Rightarrow B_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_s = -\frac{1}{5} e^{-x}\sin 3x$$

لذا جواب عمومی معادله ناهمگن به فرم زیر است:

$$y_h = y_g + y_s = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{5} e^{-x}\sin 3x$$

Scanned by CamScanner